

মাধ্যমিক বীজগণিতের ত্রুটি সংশোধন প্রসঙ্গে

গত ১০ জানুয়ারী এ কলামে প্রকাশিত 'মাধ্যমিক বীজগণিত বইয়ের ত্রুটি সংশোধন প্রসঙ্গে' শীর্ষক চিঠির প্রতি আমার দৃষ্টি আকৃষ্ট হয়েছে। দেখাও যে, যে কোন বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে ৪ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিশেষে ভাগ শেষ ১ হবে। মাধ্যমিক বীজগণিত বইয়ের অধ্যায়-২ উদাহরণ-৭ এ আলোচ্য সমস্যাটি ওই চিঠির লেখকের মতে সঠিক সূনির্দিষ্ট। কিন্তু আমার মতে সমস্যাটি সূনির্দিষ্ট নয়, সুতরাং সেটির সমাধানও সঠিক নয়।

পত্রলেখকের মতে, "১-কে ৪ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ০.১২৫ হয়। কিন্তু এটা ভো বাস্তব সংখ্যায় এবং এভাবে বলতে গেলে সকল ভাগশেষ ভাগশেষ ০ হয়। কেননা মূলদ সংখ্যার আকার হচ্ছে জড়(p,q) যেখানে p,q পূর্ণসংখ্যা এবং q>০।"

আমার বক্তব্য হচ্ছে ওই সমস্যাতে কিন্তু উল্লেখ নেই যে, ভাগফল পূর্ণ সংখ্যায় সীমাবদ্ধ রাখতে হবে বা প্রদত্ত সমস্যাটির সমস্ত প্রক্রিয়াই পূর্ণ সংখ্যায় সীমাবদ্ধ রাখতে হবে। কাজেই ভাগফল স্বাভাবিক সংখ্যায় বা পূর্ণ সংখ্যায় বা মূলদ সংখ্যায় বা বাস্তব সংখ্যায় রাখলে দোষ কী? আর এজন্যই সমস্যাটি সূনির্দিষ্ট নয়। এ প্রসঙ্গেই আমার প্রস্তাবের সূনির্দিষ্ট সমস্যা (১) এ 'ভাগফল একটি স্বাভাবিক সংখ্যাসহ' কথাটি উল্লেখ করা হয়েছে। পত্রলেখকের 'বাস্তব সংখ্যায়' কথাটি স্পষ্ট নয় কারণ বাস্তব সংখ্যা R-কে সূনির্দিষ্টভাবে দেখিয়ে

দাঁড়ায় : NCZCQCR; এখানে N-ও কিন্তু বাস্তব সংখ্যা। এরপক্ষে পত্রলেখকের বক্তব্য হচ্ছে 'এভাবে বলতে গেলে সকল ভাগেরই ভাগশেষ শূন্য (০) হয়।' সকল ভাগেরই ভাগশেষ ০ 'ধারণাটি' কি ঠিক? কারণ ১-কে ৩ দিয়ে ভাগ করতে বলার পর ভাগফল ও ভাগশেষ মূলদ সংখ্যায় চাওয়া হচ্ছে উত্তর অবশ্যই ০.৩ হতে পারে না। কারণ ১-কে ৩ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ০.৩ ও ভাগশেষ ০.১ হবে। ভাগফল ও ভাগশেষ যেখানে স্পষ্ট ও নির্দিষ্টভাবে চাওয়া হবে সেখানে সকল ভাগেরই ভাগশেষ শূন্য হয়-এটা কি যুক্তিযুক্ত?

ভাগশেষ চাওয়া হলে সেখানে অবশ্যই ভাগফল ও ভাগশেষ আলাদা আলাদাভাবে স্থান পাওয়ার কথা, অন্যথায় ভাগফল ও ভাগশেষকে একত্রে ফলাফল বলে চালিয়ে দেয়া যেতে পারে।

পত্রলেখকের পরবর্তী বক্তব্য হচ্ছে Real Number System-এ ভাগশেষ-এর প্রয়োজন নেই।

আমার বক্তব্য হচ্ছে Real Number System-এর মধ্যে কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (N), পূর্ণ সংখ্যার সেট (Z), মূলদ সংখ্যার সেট (Q) এবং অমূলদ সংখ্যার সেট (Q) বিদ্যমান। কোন সমস্যায় ভাগশেষ চাওয়া হলে সেখানে শুধু ফলাফল উল্লেখ করা হলে, উত্তর কি ঠিক হবে?

পত্রলেখকের বক্তব্য হচ্ছে Number Theory-এর Division Algorithm-এ বলা হয়েছে যদি a ও b দুইটি পূর্ণসংখ্যা হয় যেন b ক তাহলে এমন দুটো পূর্ণসংখ্যা q ও r পাওয়া যাবে যেন a=bq+r; ০ ≤ r < |b| এবং এ উপপাদ্যটিই ভাগের জন্য প্রযোজ্য।

আমার কথা হচ্ছে, স্বাভাবিক সংখ্যা, পূর্ণসংখ্যা এমনকি মূলদ সংখ্যায় ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি সম্পূর্ণই সঠিক। ভাগ প্রক্রিয়া সংক্রান্ত ওই থিয়োরিতে এটা কিন্তু বলা নেই যে, সকল ভাগের ক্ষেত্রেই q (ভাগফল) ও r (ভাগশেষ) পূর্ণসংখ্যা হতেই হবে, অন্যথায় তা ভাগ প্রক্রিয়ার মধ্যে গণ্য হবে না।

এখানে বলা হয়েছে যে, a ও b পূর্ণ সংখ্যা হলে q ও r দুটো পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যাবে এবং তার আকার হবে a=bq+r; q ও r অ-পূর্ণ সংখ্যা হলে তা ভাগপ্রক্রিয়া হবে না-এ কথা কিন্তু উক্ত থিয়োরিতে উল্লেখ নেই। বইয়ে প্রদত্ত সমস্যাটিতেও কিন্তু q ও r-এর মান পূর্ণ সংখ্যায় সীমাবদ্ধতার কথা উল্লেখ নেই।

পত্রলেখকের বক্তব্য হচ্ছে 'a=1, b=8, q=0, r=1 ধরা হলে Division Algorithm-এর শর্ত মোতাবেক উক্ত সমস্যাটি সমাধান করা যায়।' আমার প্রশ্ন হচ্ছে, আমরা কি শুধু উত্তর পাওয়ার জন্যই ছাত্র-ছাত্রীদের ভুল পথ দিয়ে এগিয়ে যেতে বলব? তাহলে সেটা সমস্যা খামাচাপা দেয়ার সায়িলা নয় কি? আর ভাগফল প্রাপ্তির আগেই কেন ভাগশেষ বুঝতে যাবে? তাও যাওয়া যেত যদি সেই Condition দেয়া থাকত। Condition ছাড়া এগুলো আর ভুলপথে পা দেয়া সমান কথা নয় কি?

সমস্যাটির সমাধানে ত্রুটি আছে। এমন স্বীকারোক্তির জন্য পত্রলেখককে ধন্যবাদ। কিন্তু পরক্ষণেই তার সঙ্গে একমত হতে পারছি না। এখানে পত্রলেখকের বক্তব্য হচ্ছে, বইয়ে x(x-1) দুটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা হিসেবে একটি জোড়। সুতরাং x(x-1), 2 দ্বারা বিভাজ্য দেখানো হয়েছে। এখানে প্রদত্ত proposition টি n=1 এর জন্য যে খাটে তা পরীক্ষামূলকভাবে দেখিয়ে পরবর্তী বিজোড় সংখ্যাগুলোর জন্য n=2x+1 ধরলেই হবে।

আমার প্রশ্ন হচ্ছে একই সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে n-এর মান একবার ধরব (2x-1) এবং আর একবার ধরব (2x+1); তাহলে সমস্যাটি সূনির্দিষ্ট হলো কিভাবে? এ ক্ষেত্রে দ্বিতীয় প্রশ্ন হচ্ছে, সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আমরা কি আমাদের সুবিধার কথা বিবেচনা করেই পক্ষপাতিত্ব অবলম্বন করব না? নিরপেক্ষ দৃষ্টি নিয়ে এভাবে

পরবর্তী পর্যায়ে পত্রলেখক বলেছেন n=2x-1, x ∈ N ধরা হবে এবং পক্ষে n²=4x(x-1)+1 হবে। x-এর মান নির্বিশেষে x(x-1) দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা যাদের একটি 2 দ্বারা বিভাজ্য।

আমার কথা হচ্ছে x(x-1); 2 দ্বারা বিভাজ্য বা 4x(x-1); 8 দ্বারা বিভাজ্য এটা ভো স্বীকৃত। কিন্তু আমাদের জ্ঞাতব্য যে, n²=(2x-1)²=4x(x-1)+1; কে কিন্তু একত্রে 8 দ্বারা ভাগ করার কথা বলা হয়েছে। আলাদা আলাদা নয় অর্থাৎ প্রথমে 4x(x-1)-কেও পরে ১-কে ভাগ করতে হয়নি।